UITWERKINGEN DITWIS FAMILIEVERBANDEN

OPGAVE 1

De vergelijking is: $-x^2+3x=-x+p \rightarrow -x^2+4x-p=0$
Eerst aan beide kanten delen door -1 om wat “minnetjes” kwijt te raken en de vergelijking gaat over in: $x^2-4x+p=0$. Raken betekent dat de discriminant 0 moet worden en dus:

$$D=(-4)^2-4\cdot 1\cdot p=16-4p \text{ moet 0 worden en dus } 16-4p=0$$

Dat levert dan op dat $p=4$. De gezochte lijn uit de familie van lijnen is dus de lijn $f_4(x)=-x+4$.

OPGAVE 2

De vergelijking is: $2x^2+8x+p=-4x-5 \rightarrow 2x^2+12x+p+5=0$
Raken betekent dat de discriminant 0 moet worden en dus:

$$D=12^2-4\cdot 2\cdot(p+5) \text{ Let op: haakjes om p+5} [c=p+5]$$
$$D=144-8(p+5)$$

Deze discriminant moet 0 worden en dus volgt er nu:

$$144-8(p+5)=0 \Leftrightarrow 8(p+5)=144 \Leftrightarrow p+5=\frac{144}{8} \Leftrightarrow$$
$$p+5=18 \Leftrightarrow p=13$$

De gezochte parabool uit de familie van parabolen is dus de parabool:
$f_{13}(x)=2x^2+8x+13$.

OPGAVE 3

De vergelijking is: $x^2+2x-3=qx-7 \rightarrow x^2+2x-qx+4=0$

Let er nu op dat $2x-qx=(2-q)x$ [werk de haakjes maar weg, dan zie je dat het klopt!]. Daarom mag je de laatste vergelijking nog schrijven als:

$x^2+(2-q)x+4=0$

Voor deze vergelijking geldt dat $A=1, B=(2-q)$ en $C=4$

Raken betekent dat de discriminant 0 moet worden en dus:

$$D=(2-q)^2-4\cdot 1\cdot 4=(2-q)^2-16$$

Deze discriminant moet 0 worden en dus volgt er nu [vergelijking oplossen met de "bordjesmethode" of "kwadraat is getal"]:

$$(2-q)^2-16=0 \Leftrightarrow (2-q)^2=16 \Leftrightarrow$$
$$2-q=-\sqrt{16}=-4 \vee 2-q=\sqrt{16}=4 \Leftrightarrow q=6 \vee q=-2$$

De gezochte lijnen uit de familie van lijnen zijn dus de lijnen:

$f_{-2}(x)=-2x-7$ en $f_6(x)=6x-7$

OPGAVE 4

De vergelijking is: $x^2+5x+8=3x+p \rightarrow x^2+2x+8-p=0$

Voor deze vergelijking geldt dat $A=1, B=2$ en $C=8-p$

De discriminant van deze vergelijking wordt dus:

$$D=2^2-4\cdot 1\cdot (8-p)=4-4\cdot (8-p)$$

Let weer op de haakjes rond $8-p$!

Deze discriminant moet >0 worden [twee snijpunten!] en dus moet de ongelijkheid $4-4\cdot(8-p)>0$ worden opgelost. Om de ongelijkheid te kunnen oplossen is altijd eerst de stap om de vergelijking op te lossen [en daarna met de getallenlijn en "Goed" / "Fout" de ongelijkheid]. Dus:

$$4-4\cdot(8-p)=0 \Leftrightarrow 4\cdot(8-p)=4 \Leftrightarrow (8-p)=\frac{4}{4} \Leftrightarrow$$

$$8-p=1 \Leftrightarrow p=7$$

Als nu $p>7$ dan geldt $4-4\cdot(8-p)>0$ [controleer met de getallenlijn! Vul bijvoorbeeld p = 8 en p = 0 in als voorbeelden!]. Dus antwoord: voor $p>7$ snijden de lijnen uit de familie $f_p(x)=3x+p$ de parabool in twee punten!

OPGAVE 5

De vergelijking is: $-0.5x^2-2=px+6 \rightarrow -0.5x^2-px-8=0$
Eerst aan beide kanten delen door -1 om de vervelende “minnetjes” kwijt te raken en de vergelijking gaat over in: $0.5x^2+px+8=0$.
Voor deze vergelijking geldt dat $A=0.5, B=p$ en $C=8$
De discriminant van deze vergelijking wordt dus:

$$D=p^2-4\cdot 0.5\cdot 8=p^2-16$$

Deze discriminant moet <0 worden [de grafieken moeten elkaar missen!] en dus moet de ongelijkheid $p^2-16<0$ worden opgelost. Om de ongelijkheid te kunnen oplossen is altijd eerst de stap om de vergelijking op te lossen [en daarna met de getallenlijn en “Goed” / “Fout” de ongelijkheid]. Dus:

$$p^2-16=0 \Leftrightarrow p^2=16 \Leftrightarrow p=-\sqrt{16}=-4 \vee p=\sqrt{16}=4 \Leftrightarrow$$

$$p=-4 \vee p=4$$

Als nu $-4<p<4$ of in de intervalnotatie $\langle -4,4\rangle$ dan geldt $p^2-16<0$ [controleer met de getallenlijn! Vul bijvoorbeeld p = 0, p = -5 en p = 5 in als voorbeelden!]. Dus antwoord: als p een waarde heeft uit het interval $\langle -4,4\rangle$ dan missen de lijnen uit de familie $f_p(x)=px+6$ de parabool!

OPGAVE 6

De vergelijking is: $px^2 = 4x - 2 \rightarrow px^2 - 4x + 2 = 0$
Voor deze vergelijking geldt dat $A = p, B = -4$ en $C = 2$
De discriminant van deze vergelijking wordt dus:

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot p \cdot 2 = 16 - 8p$$

Deze discriminant moet < 0 worden [de grafieken moeten elkaar missen!] en dus moet de ongelijkheid $16 - 8p < 0$ worden opgelost. Om de ongelijkheid te kunnen oplossen is altijd eerst de stap om de vergelijking op te lossen [en daarna met de getallenlijn en "Goed" / "Fout" de ongelijkheid]. Dus:

$$16 - 8p = 0 \Leftrightarrow 8p = 16 \Leftrightarrow p = 2$$

Als nu $p > 2$ of in de intervalnotatie $\langle 2, \rightarrow \rangle$ dan geldt $16 - 8p < 0$ [controleer met de getallenlijn! Vul bijvoorbeeld p = 0 en p = 3 in als voorbeelden!]. Dus antwoord: als p een waarde heeft uit het interval $\langle 2, \rightarrow \rangle$ dan missen de parabolen uit de familie $f_p(x) = px^2$ de lijn $g(x) = 4x - 2$!

OPGAVE 7

De vergelijking is: $x^2 = p(x-2) + 3 \rightarrow x^2 - p(x-2) - 3 = 0$
We gaan nu nog de haakjes wegwerken in de laatste vergelijking omdat we willen weten wat er nu precies voor de "x" staat en wat nu eigenlijk de "C" moet zijn in de vergelijking. We krijgen dan: $x^2 - px + 2p - 3 = 0$
Voor deze vergelijking geldt nu dat $A = 1, B = -p$ en $C = 2p - 3$
De discriminant van deze vergelijking wordt dus:

$$D = (-p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2p - 3) = p^2 - 4 \cdot (2p - 3) = p^2 - 8p + 12$$

Deze discriminant moet > 0 worden [de grafieken moeten elkaar snijden in twee punten!] en dus moet de ongelijkheid $p^2 - 8p + 12 > 0$ worden opgelost. Om de ongelijkheid te kunnen oplossen is altijd eerst de stap om de vergelijking op te lossen [en daarna met de getallenlijn en "Goed" / "Fout" de ongelijkheid]. Dus [vergelijking oplossen met de Som/Product methode]:

$$p^2 - 8p + 12 = 0 \Leftrightarrow (p-2)(p-6) = 0 \Leftrightarrow p - 2 = 0 \vee p - 6 = 0 \Leftrightarrow$$
$$p = 2 \vee p = 6$$

Als nu $p < 2$ of $p > 6$ of in de intervalnotatie $\langle \leftarrow, 2 \rangle$ of $\langle 6, \rightarrow \rangle$ dan geldt $p^2 - 8p + 12 > 0$ [controleer met de getallenlijn! Vul weer getallen in als voorbeelden!]. Dus antwoord: als p een waarde heeft uit het interval $\langle \leftarrow, 2 \rangle$ of $\langle 6, \rightarrow \rangle$ dan snijden de lijnen uit de familie $f_p(x) = p(x-2) + 3$ de parabool in twee punten!

OPGAVE 8

Een parabool uit de familie $f_p(x) = -2x^2 + px - 18$ ligt volledig onder de x-as [merk op: alle parabolen uit de familie zijn bergparabolen!] als zo'n parabool de x-as dus niet snijdt! Met andere woorden: de vergelijking $-2x^2 + px - 18 = 0$ mag geen oplossingen hebben!
Voor deze vergelijking geldt nu dat $A = -2, B = p$ en $C = -18$
De discriminant van deze vergelijking wordt dus:

$$D = p^2 - 4 \cdot -2 \cdot -18 = p^2 - 144$$

Deze discriminant moet < 0 worden [de x-as moet gemist worden, dus geen oplossingen] en dus moet de ongelijkheid $p^2 - 144 < 0$ worden opgelost. Om de ongelijkheid te kunnen oplossen is altijd eerst de stap om de vergelijking op te lossen [en daarna met de getallenlijn en "Goed" / "Fout" de ongelijkheid]. Dus [vergelijking oplossen met de Som/Product methode]:

$$p^2 - 144 = 0 \Leftrightarrow p^2 = 144 \Leftrightarrow p = -\sqrt{144} = -12 \vee p = \sqrt{144} = 12 \Leftrightarrow$$
$$p = -12 \vee p = 12$$

Als nu $-12 < p < 12$ of in de intervalnotatie $\langle -12, 12 \rangle$ dan geldt $p^2 - 144 < 0$ [controleer met de getallenlijn! Vul bijvoorbeeld p = 0, p = -13 en p = 13 in als voorbeelden!]. Dus antwoord: als p een waarde heeft uit het interval $\langle -12, 12 \rangle$ dan liggen de parabolen uit de familie $f_p(x) = -2x^2 + px - 18$ volledig onder de x-as!

OPGAVE 9

De vergelijking is: $2x^2 - 4x + p = -2x + 2 \rightarrow 2x^2 - 2x + p - 2 = 0$

Voor deze vergelijking geldt dat $A = 2, B = -2$ en $C = p - 2$

Raken betekent dat de discriminant 0 moet worden. De discriminant is gelijk aan:

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (p-2) = 4 - 8 \cdot (p-2)$$

Deze discriminant moet 0 worden en dus volgt er nu:

$$4 - 8 \cdot (p-2) = 0 \Leftrightarrow 8 \cdot (p-2) = 4 \Leftrightarrow (p-2) = \frac{4}{8} \Leftrightarrow$$

$$p - 2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow p = 2\frac{1}{2}$$

Dus voor $p = 2\frac{1}{2}$ raakt de parabool $f_{2\frac{1}{2}}(x) = 2x^2 - 4x + 2\frac{1}{2}$ aan de lijn $g(x) = -2x + 2$.

In dat geval kun je coördinaten van het raakpunt uitrekenen. Je krijgt dan:

$x_{Raakpunt} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2A} = \dfrac{--2 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$. En voor de y-waarde van het raakpunt vind je [door in te vullen]: $y_{Raakpunt} = 1$.