Antwoorden voorbeeldvragen 1^e^ ronde Wiskunde Olympiade

1. C) 120

Tweemaal de lengte van een rechthoekje is gelijk aan driemaal zijn breedte. De verhouding lengte : breedte is dus $3:2$. Met een omtrek van 20, moeten de lengte en breedte dus gelijk zijn aan 6 en 4. De oppervlakte van een rechthoekje is dan $6\times 4=24$ en de oppervlakte van rechthoek $ABCD$ is vijfmaal zo groot, dus 524 = 120 $5\times 24=120$.

2. B) b

Voor de sommen van tweetallen zien we dat: $e+a<c+d<a+b<b+c<d+e$.

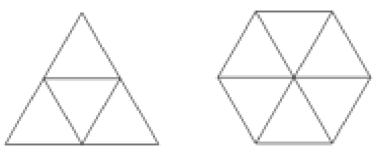
Elke som van vier getallen kun je krijgen door twee van deze tweetallen op te tellen. Zo is bijvoorbeeld $a+b+c+e$ gelijk aan $(e+a)+(b+c)$. Van alle viertallen heeft het viertal a, c, d, e de kleinste som, want $a+c+d+e=(e+a)+(d+c)$ is de som van de twee kleinste tweetallen. Het overgebleven getal, namelijk b, is dus het grootst van de vijf. Immers, het grootste getal is het getal waarvoor de overige vier getallen de kleinste som hebben.

3. C) $\frac{1}{15}$

We mogen voor het gemak wel aannemen dat er 20 dozen zijn; dat maakt voor de verhoudingen niet uit. Van de 20 dozen zijn er dus 5 leeg. Van de 5 dozen die worden geopend blijkt een vijfde niet leeg te zijn, precies 1 doos. Omdat er 4 geopende dozen leeg zijn, blijft er nog precies 1 lege doos over onder de 15 ongeopende dozen.

4. D) $3:2$

We verdelen de zeshoek in zes gelijkzijdige driehoekjes en de driehoek in vier gelijkzijdige driehoekjes zoals in de figuur. Omdat de zeshoek en de driehoek gelijke omtrek hebben, zijn de zijden van de driehoek tweemaal zo lang als die van de zeshoek. De driehoekjes in deze verdelingen zijn dus even groot. De verhouding tussen de oppervlaktes is daarom $6:4$, oftewel $3:2$.



5. C) 3125

We bekijken de laatste vier cijfers van de machten van 5:

$$
\begin{array}{ll}
5^1 = 0005 & 5^5 = 003125 \\
5^2 = 0025 & 5^6 = 015625 \\
5^3 = 0125 & 5^7 = 078125 \\
5^4 = 0625 & 5^8 = 390625
\end{array}
$$

Bij het berekenen van de laatste vier cijfers van een macht van 5, is het voldoende om de laatste vier cijfers van de vorige macht van 5 te weten. Zo zijn de laatste vier cijfers van 5×390625 en van 5×0625 gelijk, namelijk 3125. Omdat de laatste vier cijfers van 5^4 en 5^8 gelijk zijn, zullen de laatste vier cijfers van de machten van 5 zich vanaf daar elke vier stappen herhalen. De laatste vier cijfers van 5^{2013} zijn dus gelijk aan die van 5^{2009} en van 5^{2005}, enzovoorts tot en met die van $5^5 = 3125$. De laatste vier cijfers zijn dus 3125.

6. 244882

We bekijken alleen getallen met de even cijfers 2, 4 en 8. Als zo'n getal eindigt op cijfer 4 of 8, dan is het getal een veelvoud van 20 plus 4 of 8 en dus deelbaar door 4. Als zo'n getal eindigt op cijfer 2, dan is het een veelvoud van 20 plus 2 en dus niet deelbaar door 4. Het laatste cijfer moet dus een 2 zijn. De overgebleven cijfers kunnen we van laag naar hoog sorteren. We vinden dan 244882.

7. $\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$

De driehoeken ADF, BDA en BAF zijn gelijkvormig dus

$$\frac{b}{a} = \frac{BA}{DA} = \frac{AF}{DF} = \frac{BF}{AF}$$

Hiermee kan geschreven worden: $$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{BA^2}{DA^2} = \frac{AF}{DF} \cdot \frac{BF}{AF} = \frac{BF}{DF} = \frac{9}{4}$$

Dus vinden we $\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$.

8. 25 keer

De combinatie "2013" komt 13 keer voor als onderdeel van een van de volgende getallen: 2013, 12013, 22013 en 20130 t/m 20139. Daarnaast komt "2013" ook voor als eind van een getal gevolgd door het begin van het volgende getal. De verschillende mogelijke splitsingen zijn:

2|013 komt niet voor, want geen getal begint met een '0'.

20|13 komt 11 keer voor: 1320|1321 en 13020|13021 t/m 13920|13921.

201|3 komt slechts 1 keer voor: 3201|3202, want we noteren geen getallen groter dan 30 000.

Het is makkelijk na te gaan dat "2013" niet voorkomt als combinatie van drie opeenvolgende getallen. In totaal komt "2013" dus 13 + 11 + 1 = 25 keer in de cijferrij voor.